

MATEMATICA III

CORSO DI LAUREA IN STATISTICA, ECONOMIA, FINANZA E ASSICURAZIONI
FACOLTÀ DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE, INFORMATICA E STATISTICA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
A.A. 22/23

DOCENTE: DOTT. GIULIO GALISE

Cognome e nome:

Numero di matricola:

Prova scritta del 18.01.2023

Esercizio 1 (7 punti). Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione X della funzione

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x - |y|} + \log(1 - x)}{y^4 + (2x - 1)^2}.$$

Dire (senza giustificare la risposta) se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- X è aperto;
- X è chiuso;
- la parte interna $\overset{\circ}{X}$ è un insieme convesso;
- $(\frac{1}{2}, 0)$ è di accumulazione per X ;
- $(1, 1) \in \partial X$.

Esercizio 2 (8 punti). Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3(xy + y^3)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (i) stabilire se la funzione f è continua in $(0, 0)$;
- (ii) stabilire se la funzione f è derivabile in $(0, 0)$;
- (iii) calcolare la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$, dove $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$;
- (iv) stabilire se la funzione f è differenziabile in $(0, 0)$.

Esercizio 3 (9 punti). Sia $f(x, y) = x^2 - 12y + (x^2 + y^2)y + 7$.

- (i) Determinare i punti critici di f e studiarne la natura.
- (ii) Determinare, se esistono, massimo e minimo assoluti di f in

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Esercizio 4 (9 punti). Siano

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$D_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\} .$$

(i) Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_{D_1} \frac{ye^{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy .$$

(ii) Stabilire la validità della disuguaglianza

$$\iint_{D_2} \frac{ye^{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \leq \iiint_{D_3} |xyz| dx dy dz .$$